Seleção Mestrado IM 2022.2

July 2022

Problema 1 *Seja (x_n) uma sequência limitada. Se $\lim a_n = a$ e cada a_n é um valor de aderência de (x_n), então a é um valor de aderência de (x_n).*

Problema 2 *Seja $g \geq 0$ integrável. Se $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, seja qual for f integrável.*

Problema 3 *Prove que o conjunto dos pontos de máximo (ou mínimo) local estrito de qualquer função $f : R \longrightarrow R$ é enumerável.*

Problema 4

4.1 *Defina o que significa f_n convergir uniformemente para a função f sobre $[a, b]$ e prove que se f_n é uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente para f, então a função limite f é continua.*

4.2 *Dê um exemplo de uma sequencia de funções reais contínuas $\{f_n\}$ definidas sobre o intervalo fechado sobre $[0, 1]$ que converge pontualmente para a f sobre $[0, 1]$, mas f não é continua.*

Problema 5 *Seja f uma função real continua sobre $[a, b]$ e suponha que*

$$\int_a^b x^n f(x)\, dx = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Mostre que $f(x)$ é identicamente nula.

Gabarito da Seleção Mestrado IM 2022.2

July 2022

1. Mostraremos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um termo da sequência $y_k = x_{n_k}$ de modo que $|y_k - a| < 1/k$. De fato, como $\lim a_n = a$, para cada k existe um $n_0 = n_0(k)$ tal que $|a_{n_0} - a| < \frac{1}{2k}$. Agora, como $a_{n_0(k)}$ é ponto aderente de (x_n), segue que existe x_{n_k} de modo que $|x_{n_k} - a_{n_0(k)}| < \dfrac{1}{2k}$. Assim, pela desigualdade triangular

$$|x_{n_k} - a| \leq |x_{n_k} - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < \frac{1}{k}.$$

2. Antes de mais nada, lembre que, por definição, uma função para ser dita integrável precisa ser limitada. Assim, f e g já devem ser limitadas. Além disso, recorde que se f é integrável, então $|f|$ também é. Agora, observe que, como $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, temos

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|dx = \int_a^b |f(x)|g(x)dx.$$

Como $|f|$ é limitada, existe k tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in [a, b]$. Portanto,

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \int_a^b kg(x)dx = k \int_a^b g(x)dx = 0,$$

e o resultado segue.

3. Seja X o conjunto dos pontos de mínimo local estrito de f. Para cada $a \in X$, seja $I_a := (x_a, y_a)$, um intervalo com extremos racionais de modo que $f(x) > f(a)$ para todo $x \in I_a \setminus \{a\}$. Para quaisquer pares de pontos distintos $a, b \in X$, note que deve ocorrer $a \notin I_b$ ou $b \notin I_a$, pois o contrário disto seria uma contradição com as definições destes intervalos. Portanto $I_a \neq I_b$ sempre que $a \neq b$. Isto mostra que existe uma função injetiva $g : X \longrightarrow I$ onde I é o conjunto de todos os intervalos abertos com extremos racionais, que por sua vez é enumerável pois está em bijeção com $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Isto mostra existe uma bijeção de X com um subconjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Portanto X é enumerável.

4. 4.1 Seja X um conjunto não-vazio. Uma sequencia de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se para cada número

real positivo $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende apenas de ε) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todos $x \in X$ e $n > n_0$.

Primeiro, note que convergencia uniforme implica em convergencia pontual. Para mostrar que, o limite uniforme de funções continuas é uma função continua, basta mostrar que dado $x \in [a, b]$ e x_n converge para x, então $f(x_n) \to f(x)$. E isto segue do fato que

$$|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)|.$$

4.2 Tome $f_n(x) = x^n$ e $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 1$

5. Seja (p_k) uma sequência de polinômios que converge uniformemente para f. Então $p_k \cdot f$ converge uniformemente para f^2. Pelo Teorema da Convergência Uniforme, $\lim \int p_k f dx = \int f^2 dx$. Mas por hipótese $\int p_k f = 0$ para todo k. Portanto, $\int f^2 dx = 0$. Como f^2 é contínua e não negativa, devemos ter $f^2(x) = 0$ para todo x. Portanto, f é identicamente nula.